TOPOLOGIE. — *Sur les espaces discrets.*

Note de M. **Paul Alexandroff**, présentée par M. Jacques Hadamard.

1. Nous entendons, dans cette Note, par *espace topologique* un ensemble E d'éléments quelconques, dans lequel certains sous-ensembles, dits *ensembles fermés*, sont choisis de façon que les conditions suivantes soient vérifiées :

A. La partie commune (le *produit*) d'un nombre quelconque (fini ou infini) et la somme d'un nombre fini d'ensembles fermés sont des ensembles fermés.

B. L'ensemble vide et l'espace entier sont fermés (1). Les ensembles fermés étant choisis, leurs complémentaires sont appelés ensembles *ouverts*. Des ensembles ouverts contenant un élément de l'espace E s'appellent *voisinages* de cet élément. La *fermeture* $\overline{A}$ d'un ensemble quelconque $A \subset E$ est par définition le produit de tous les ensembles fermés contenant A.

2. Cela posé, appelons *espace discret* tout espace topologique dans lequel la somme d'un nombre quelconque (non nécessairement fini) d'ensembles fermés est un ensemble fermé. Dans un espace discret D, chaque élément p est contenu non seulement dans un ensemble fermé minimal (fermeture $\overline{p}$ de p), mais aussi dans un ensemble ouvert minimal Op qui est le produit de tous les ensembles ouverts contenant p. Les ensembles $\overline{p}$ et Op sont dits *ensembles élémentaires*, fermés et ouverts. Nous considérons, en outre, comme ensembles élémentaires (fermés et ouverts en même temps) l'ensemble vide et l'espace entier.

Nous supposons de plus que notre espace D vérifie l'*axiome de séparation* suivant indiqué par M. Kolmogoroff : pour deux éléments distincts p et p' les ensembles $\overline{p}$ et $\overline{p'}$ sont eux aussi distincts. Il en résulte sans peine que les ensembles Op et Op' sont, dans ce cas, aussi distincts.

On vérifie facilement : si $p' \subset \overline{p}$, alors $Op' \supset p$. Deux espaces discrets sont appelés *réciproques* s'il existe entre les éléments des deux espaces une correspondance biunivoque telle que, si $p_1 \subset \overline{p}_2$ dans D, on a pour les

(1) Ces espaces sont introduits par M. Kuratowski (*Fund. Math.*, 3, 1922, p. 182); cf. aussi Hausdorff, *Mengenlehre*, Berlin et Leipzig, 1927, p. 227.

éléments correspondants de D' la relation $p'_2 \subset \overline{p}'$. On obtient l'espace réciproque à D en considérant Op comme fermeture de p.

3. Un système S d'ensembles M quelconque peut être considéré comme un espace discret D, si l'on convient de dire que l'élément M_1 de D est dans la fermeture de l'élément M_2 de D, si l'on a, pour les ensembles M_1 et M_2, la relation $M_1 \subset M_2$. On obtient l'espace réciproque en renversant dans la dernière relation le signe d'inclusion. Inversement, tout espace discret correspond de cette manière à un système d'ensembles. On peut exprimer le même fait en disant que *les espaces discrets ne sont que des ensembles partiellement ordonnés*.

4. Axiome multiplicatif. — *Le produit d'un nombre quelconque* (fini ou infini) *d'ensembles élémentaires fermés est un ensemble élémentaire fermé*.

Il en résulte que le produit d'un nombre quelconque d'ensembles élémentaires ouverts est un ensemble élémentaire ouvert : ce sera l'ensemble Op_0, où p_0 est défini par la propriété que $\overline{p}_0$ est le produit de tous les ensembles élémentaires fermés contenant les $\overline{p}$ correspondant aux Op donnés; $\overline{p}_0$ est nommé *somme algébrique* des $\overline{p}$.

5. Axiomes des dimensions. — *Toute suite bien ordonnée,*

(1) *Décroissante*, (2) *Croissante*,

d'ensembles élémentaires fermés distincts entre eux est finie.

Chacun des deux axiomes contenus dans cet énoncé permet d'attribuer à chaque élément de D un nombre ordinal, qui sera nommé dans le cas (1) la *dimension* $d(p)$, dans le second cas la *contre-dimension* $c(p)$ de l'élément p.

Les éléments à dimension nulle ou les *sommets* de D sont les éléments fermés ($p = \overline{p}$); les éléments à contre-dimension nulle sont les éléments ouverts ($p = Op$). Si les deux axiomes de dimension sont remplis, la dimension et la contre-dimension de tout élément de D sont finies et liées par la relation $d(p) + c(p) = d(q)$, q étant un élément ouvert de dimension minimum et tel que $\overline{q} > p$.

6. Dans nos espaces D, deux opérations commutatives, associatives et réciproquement distributives se trouvent définies pour un aggrégat quelconque d'ensembles élémentaires fermés : la multiplication et l'addition algébrique (nos 1 et 4). L'espace discret D peut donc être envisagé comme une sorte d'algèbre booleienne généralisée [1]. On obtient le *premier*

---

[1] *Verband* au sens de M. Fr. Klein, *Math. Ann.*, 106, 1932, p. 116.

axiome de la base en exigeant que les sommets de l'espace (c'est-à-dire ses éléments fermés) forment une base (par rapport à l'addition algébrique) de l'algèbre booleienne en question. Cela veut dire : un élément quelconque de l'espace est univoquement déterminé par les sommets de sa fermeture.

Théorème. — *Tout espace discret ne contenant qu'un nombre fini d'éléments et vérifiant l'axiome multiplicatif et le premier axiome de la base est homéomorphe à un espace discret* D *dont les éléments sont des polyèdres situés dans un espace euclidien à un nombre assez grand de dimensions; dans l'espace* D *un élément* p' *appartient à* $\overline{p}$ *si le polyèdre* p' *fait partie du polyèdre* p.

Second axiome de la base. — *Il existe, pour tout ensemble de sommets* U' *appartenant à un même* $\overline{p}$, *un élément* p' *tel que l'ensemble des sommets de* $\overline{p}$ *est précisément l'ensemble* U.

Un espace discret vérifiant ces axiomes s'appelle *espace simplicial;* un élément à n dimensions d'un espace simplicial contient dans sa fermeture exactement $n+l$ sommets. Les espaces simpliciaux sont donc identiques avec les *champs de sommets* (1) dans lesquels on sait édifier l'*Analysis situs* combinatoire.

Les espaces finis vérifiant le premier axiome de la base, et dont les espaces réciproques sont simpliciaux, méritent d'être étudiés d'une manière approfondie.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur certaines opérations du type elliptique.* Note de M. **Georges Giraud.**

Considérons une opération du type elliptique

$$\mathcal{F}\, u = \Sigma_{\alpha,\beta}\, a_{\alpha;\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta} + \Sigma_\alpha b_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + cu \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m;\ m \geqq 2).$$

On entend par *solution fondamentale* ou par *solution élémentaire* toute fonction $G(X, \Xi)$ de deux points de l'espace, devenant infinie d'une certaine façon quand X tend vers Ξ, et qui satisfait à l'équation $\mathcal{F}_X G = 0$, sauf quand X est en Ξ (2). Cette définition ne détermine pas G. Mais on a

(1) *Eckpunktbereich*, P. Alexandroff, *Einfachste Grundbegriffe der Topologie*, Berlin, 1932, p. 34.

(2) *Bull. Sciences math.*, 56, 1932, p. 248 à 272, 281 à 312, 316 à 352, et *errata* p. 384; spécialement Chap. I, § 14, p. 270. Noter aussi la définition généralisée de $\mathcal{F}$, Chap. I, § 2, p. 252.